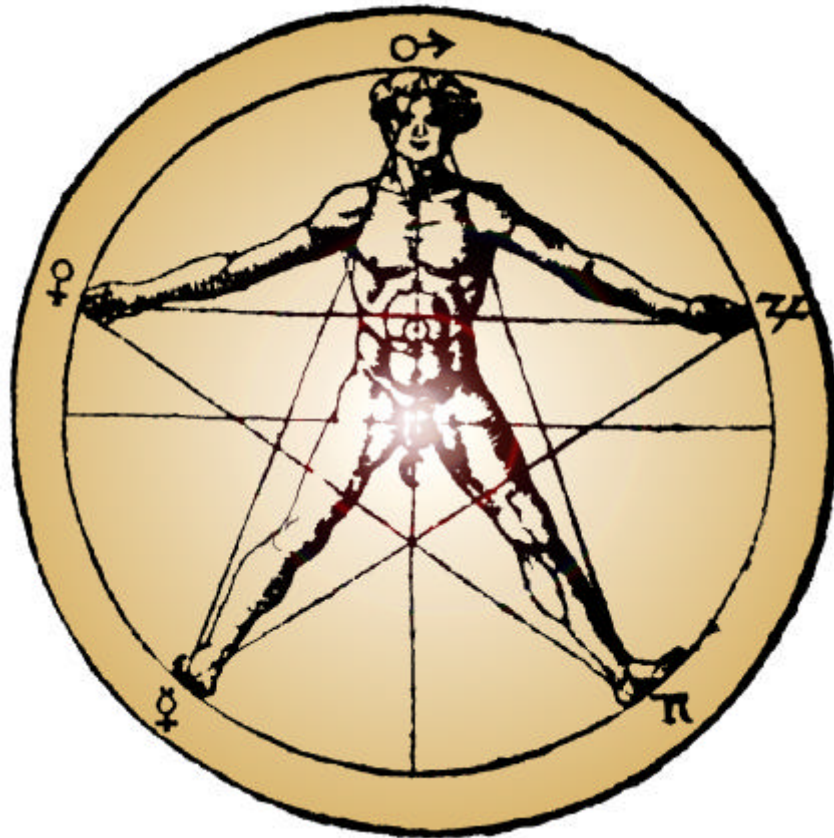


# EL NOMBRE D'OR

I EL SEU ÚS EN L'ARQUITECTURA

RELIGIOSA DEL GÒTIC CATALÀ



Albert Gironès i Pérez

Tutor de recerca: Carles Martí i Salleras

I.E.S. FORT PIUS

2n de Batxillerat

Curs 1999–2000



*Als meus pares, sens dubte.*

*Així, doncs, si la natura ha disposat el cos de l'home de tal manera que les parts es corresponguin proporcionalment amb la configuració total, és amb raó que va semblar bé als antics que en una obra perfecta la mesura de cada membre guardés una correspondència amb l'obra sencera...*

VITRUVI  
(*D'Arquitectura*, llibre tercer, capítol 1)

# PRESENTACIÓ

Fa dos anys vaig experimentar una gran sorpresa, un descobriment que em va cridar molt l'atenció: un nombre amb nom i cognom. Jo només coneixia el nombre  $\pi$  i el nombre  $e$ , i mai havia sentit a parlar de  $\Phi$ . Certament es tracta d'una xifra totalment desconeguda per la majoria de la gent; fins i tot segueix representant quelcom misteriós pels qui mínimament en coneixen les seves propietats.

El pentàgon, el decàgon, l'espiral logarítmica, el rectangle d'or, la successió de Fibonacci, la *Venus* de Botticelli i un llarg etcètera d'exemples em van meravellar, mostrant-me relacions, formes i projeccions que mai abans m'havia parat a observar conscientment. Fins i tot el propi nombre ja inspirava quelcom totalment nou, l'origen d'una infinitat de preguntes amb resposta. El sol fet de reconèixer la secció auria a la natura, en forma d'estrelles de mar, de flors pentagonals, de pinyes, em donava molt més sentit o, si més no, una idea molt més fundada que vivim en un univers de formes, relacions i imatges totalment lògiques. L'home, pel que fa a l'art clàssic, ha estès les propietats del nombre d'or a través de la pintura, l'arquitectura, la música, l'esculptura, i nogensmenys la ciència. És a dir, fins i tot l'home, que podriem considerar fins a cert punt una espècie a part, ha obeït la mare natura creant edificis, temples, quadres... molts d'ells regulats per la secció auria.

Dins els límits d'un treball breu, estudiarem i tractarem l'arquitectura religiosa gòtica catalana com un exemple més de la tradició mística i religiosa que des de les antigues civilitzacions tenia una projecció arquitectònica basada en la secció auria. Tot i que els edificis religiosos del gòtic català han tingut un paper destacat com a elements d'identificació col·lectiva i, per tant, de diferenciació, l'arquitectura catalana no s'ha allunyat gaire de la resta pel que fa a la base estructural geomètrica, en què hi juga un paper important el nombre d'or. És a dir, veurem com a Catalunya els arquitectes almenys conservaren el nombre d'or com a cànon geomètric per tal d'inspirar en aquest cas la purificació divina, o, si més no, l'utilitzaren com a simple vehicle estètic. L'art gòtic en general i l'arquitectura en particular són un dels principals senyals d'identitat de l'art català, juntament amb l'art romànic i el Modernisme. L'arquitectura gòtica catalana destaca per la seva important presència en el paisatge monumental del país, per la seva associació amb un moment històric de màxima plenitud política i cultural, i és per això que mereix un estudi centrat en demostrar l'ús conscient de la proporció auria en les seves obres.

Una part important de la nostra exposició està dedicada a les idees que graviten al voltant del nombre d'or, així com a les aplicacions que se'n fan o que són susceptibles de fer-se'n. A la primera part –*Introducció matemàtica*– hem explicat allò que és essencial, les propietats matemàtiques suficients per comprendre millor la recerca. En la segona part, titulada *Cànons geomètrics d'arquitectura i sistemes*

*analítics de proporció*, ens hem estès força pel que fa al caràcter geomètric del nombre d'or a través de rectangles dinàmics, citant noves figures que no deixen de tenir relació amb la secció auria.

Reconeixem que alguns anàlisis d'obres arquitectòniques han resultat bastant pobres i limitats pel que fa a l'estudi geomètric del nombre d'or. Cal pensar que la matèria és extremadament abundant i complexa, d'aquí que els treballs d'exploració siguin immensos i requereixin un estudi profund i detallat. La falta de lloc no ens ha permès fer un examen rigorós i ampli de la investigació, i ens hem limitat a exposar aquells aspectes essencials de la secció auria en les projeccions arquitectòniques. D'altra banda, tampoc hem volgut crear una visió massa complexa; hem evitat aquells aspectes complicats que d'una altra manera podrien crear confusió. Una sèrie de làmines acompanyen el treball, la majoria d'elles per facilitar la comprensió del text; les altres són purs exemples pragmàtics.

En la realització d'aquesta recerca científica, m'he trobat amb certes dificultats com són buscar el material bibliogràfic, ja que es tracta d'un tema que fins fa relativament poc no havia conegut un estudi ampli i monogràfic. He necessitat l'ajuda de la meua mare per traduir alguns textos del francès; cal pensar que la major part de la producció de literatura científica està escrita en anglès, francès, italià i alemany, i és per això que, tractant-se d'aquest tema, he hagut d'acudir a llibres en llengua estrangera, on podria trobar una informació més completa i detallada. Tanmateix, cal dir que no he deixat de banda tota aquella bibliografia en castellà o en català que m'ha servit per a la investigació. He fet contínues visites a la Biblioteca de l'Escola Tècnica Superior d'Arquitectura, on he trobat la majoria de fonts bibliogràfiques, sobretot pel que fa a l'art gòtic català. En aquest context, vull aprofitar per demanar a l'Institut Fort Pius que es queixi de les normes de l'Arxiu Històric de la Ciutat, on fan un servei públic per a tothom qui necessiti informació, exceptuant els estudiants menors de 18 anys que fan treballs i als quals no els permeten l'entrada per considerar-los presumptes delinqüents.

A banda d'aquesta anècdota, pràcticament no he trobat obstacles en quant a l'obtenció d'informació necessària per la realització del treball. Gràcies també a Internet i a nombroses visites a llibreries especialitzades he trobat el material necessari que malauradament he hagut de simplificar i reduir molt.

Agraeixo sincerament la col·laboració i l'interès de Mercè Pérez, Carles Martí i Joan Gispert, persones gràcies a les quals aquest treball ha estat possible. Vull agrair també les facilitats rebudes per la Biblioteca de l'Escola Tècnica Superior d'Arquitectura, la qual m'ha proporcionat la major part de la informació tractada en aquesta recerca.

Barcelona, 25 de febrer del 2000

# 1. INTRODUCCIÓ MATEMÀTICA

A l'inici d'aquest treball, ens veiem obligats a entrar en el nombre d'or des d'una visió geomètrica, fent una breu definició, que permetrà endinsar-nos ràpidament en el tema central de la recerca. Ens servirà aquest preludi no només per a la millor comprensió de les explicacions que després segueixen, sinó també per a introduir a tota persona que desconegui aquest nombre i la infinitud de propietats i possibilitats que en ell s'amaguen i que han servit a molts artistes en la història.

Es tracta d'un nombre irracional, el valor exacte del qual és igual a  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Designarem el nombre d'or, seguint una denominació recent, per la lletra grega  $\Phi$  (fi) –al·lusió al cèlebre escultor Fídies– i així escriurem:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Aquest nombre és una constant de proporció que determina la raó entre les dues longituds d'un segment dividit en mitjana i extrema raó, concepte que tot seguit explicarem. Abans cal dir que fent referència a aquesta proporció diversos autors han fet ús de diferents designacions. Fou anomenada *divina proporció* pel monjo bolonyès Fray Luca Paccioli di Borgo, que li consagrà el magnífic tractat *Divina Proportione* il·lustrat pel seu amic Leonardo da Vinci. Johannes Kepler, per al qual és una joia preciosa (“un dels tresors de la geometria”), també l'anomena *secció divina*. Leonardo da Vinci li donà el nom de *secció auria*. El matemàtic alemany C. Clavius, emprà la denominació *divisió proporcional*, que Kepler també va utilitzar en alguna ocasió.

Tanmateix, el nom més popular és *secció auria*, *proporció auria* o *nombre d'or*. És el més utilitzat per la majoria de matemàtics i el que també usarem nosaltres en el transcurs d'aquest treball.

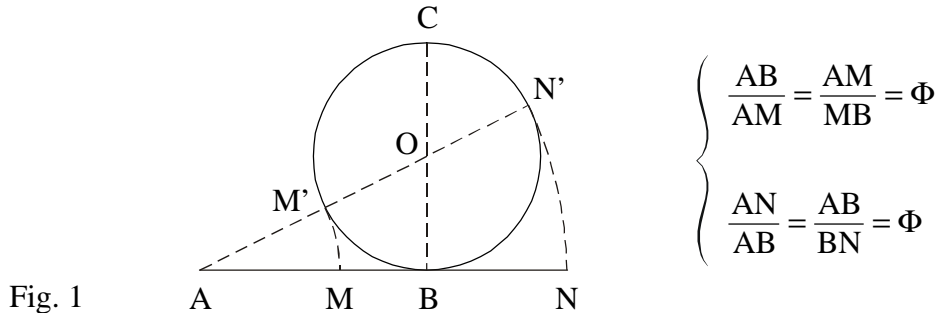
Comencem, doncs, explicant com es pot obtenir aquest nombre i en quines figures geomètriques el podem trobar.

## 1.1. DIVISIÓ D'UN SEGMENT DE RECTA EN MITJANA I EXTREMA RAÓ

Considerem un segment de recta AB i proposem-nos determinar un punt M situat entre A i B. Si volem que el punt M divideixi el segment AB segons la proporció auria, la relació de la part més llarga amb la part més petita ha de ser igual a la relació del tot amb la part més llarga, és a dir,  $AM/MB=AB/AM$ . Si aquesta condició es compleix, això vol dir que el punt M divideix el segment AB en mitjana i extrema raó.



A partir d'una construcció geomètrica molt simple (Fig. 1), podem dividir qualsevol segment de recta en la secció auria (mitjana i extrema raó). Tracem el segment de recta BC, perpendicular a AB i de longitud BC = AB. Dibuixem el cercle de diàmetre BC i de centre O, de manera que la recta que passa per A i O talla el cercle en els punts M' i N'.



Per obtenir el punt M buscat només cal portar sobre AB una longitud igual a AM'. El càlcul demostra que el punt M es troba perfectament definit per la relació AB/AM, i que aquesta proporció no és altra que el nombre d'or.

Tornem a portar des d'A, sobre la prolongació del segment AB, una longitud AN igual a AN'. Es verifica que AN/AB=AB/BN=Φ. Això vol dir que el punt B divideix el segment AN en mitjana i extrema raó, de la mateixa manera que ho fa M en el segment AB.

Podem demostrar aquesta relació tenint en compte la potència del punt A respecte la circumferència de centre O,

$$\begin{aligned} (AB)^2 &= (AM') \cdot (AN') \\ (AB) &= \frac{(AM') \cdot (AN')}{(AB)} \\ \frac{AB}{AM'} &= \frac{AN'}{AB} \end{aligned}$$

O bé,

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AN}{AB}$$

## 1.2. OBTENCIÓ DE LA CONSTANT Φ

Com a equació, de les relacions de mitjana i extrema raó en resulta:  
 $\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{AM} = \Phi$ . Com que  $AB = AM + MB$ , escriurem :  $\frac{\hat{A}\hat{I}}{\hat{I}\hat{A}} = \frac{\hat{A}\hat{I} + \hat{I}\hat{A}}{\hat{A}\hat{I}}$ .

L'objectiu és trobar Φ, per tant, hem de trobar el valor d'AM/MB. Si substituïm AM per a i MB per b, obtenim  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ .



Dividim tots els termes per  $b$ :

$$\frac{a/b}{b/b} = \frac{a/b + b/b}{a/b} \longrightarrow \frac{a/b}{1} = \frac{a/b + 1}{a/b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a/b + 1}{a/b} \longrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + 1 \longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1$$

Ara, sabent que la incògnita  $a/b$  és igual a  $\Phi$ , substituïm:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

D'aquesta equació de segon grau obtenim dos resultats:

$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$$

$$\Phi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,618\dots$$

Estem tractant longituds, per tant no podem acceptar valors negatius com  $\Phi_2$ . Així, el valor de  $\Phi_1 = 1,618\dots$  és l'expressió aritmètica del nombre d'or.

Cal dir que, curiosament,  $-0,618\dots$  és igual al valor oposat del valor invers de  $\Phi$ , és a dir,  $-\Phi^{-1} = -0,618\dots$  O bé,  $\Phi^{-1} = 0,618\dots$

### 1.3. OBTENCIÓ DE LA SECCIÓ AURIA A PARTIR D'UN QUADRAT, RECTANGLE D'OR

Si construïm un quadrat de costat  $AM$  (Fig. 2) i busquem el punt mig  $T$  al segment  $AM$ , amb el radi  $TN$  tracem un arc de cercle de centre  $T$  que talli la prolongació d' $AM$  en el punt  $B$ , llavors  $AB$  queda dividit en la secció auria per  $M$ .

El rectangle  $ABCD$  s'anomena rectangle d'or per la proporció que mantenen els seus costats, la qual dóna com a constant  $\Phi$ .

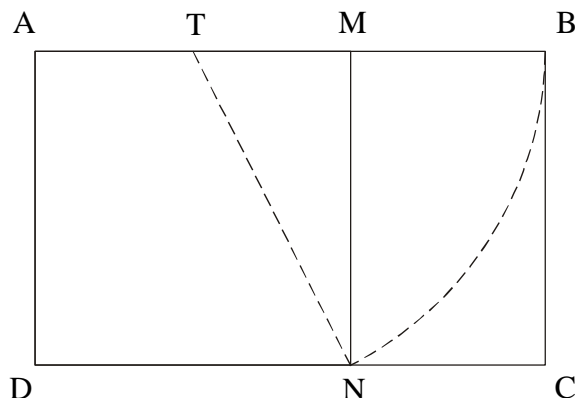


Fig. 2

Podem demostrar que  $AB/AD=\Phi$ . Sabem que  $AD=AM$ ;  $TM=AM/2$ ;  $MN=AM$ . També sabem que  $TN=TB=AB-AM/2$ .

Segons el teorema de Pitàgores,  $(TN)^2=(TM)^2+(MN)^2$ . Substituïm i obtenim:

$$\begin{aligned} (AB-AM/2)^2 &= (AM/2)^2 + (AM)^2 \\ (AB-AM/2)^2 &= \frac{(AM)^2}{4} + (AM)^2 \\ (AB-AM/2)^2 &= \frac{(AM)^2 + 4(AM)^2}{4} = \frac{5(AM)^2}{4} \\ (AB-AM/2) &= \sqrt{\frac{5(AM)^2}{4}} = \frac{AM\sqrt{5}}{2} \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} AB &= \frac{AM\sqrt{5}}{2} + \frac{AM}{2} = \frac{AM\sqrt{5} + AM}{2} \\ AB &= AM \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \\ \frac{AB}{AM} &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi \end{aligned} \right.$$

S'ha obtingut, a més, un altre rectangle d'or MBCN, del qual en podríem obtenir un altre i així successivament fins a l'infinit (Fig. 3). Es tracen amb aquest sistema geomètric les famoses espirals equiangulars o logarítmiques. Aquestes espirals les podem identificar (dins d'un paràmetre de semblança important) en moltes formes de la natura (Làmines XI i XII).

Un rectangle d'or està format per un quadrat i un altre rectangle d'or el costat major del qual és igual al costat petit del primer. Més endavant estudiarem aquesta propietat que fa del rectangle auri un dels més importants dins la geometria antiga egípcia i grecoromana.

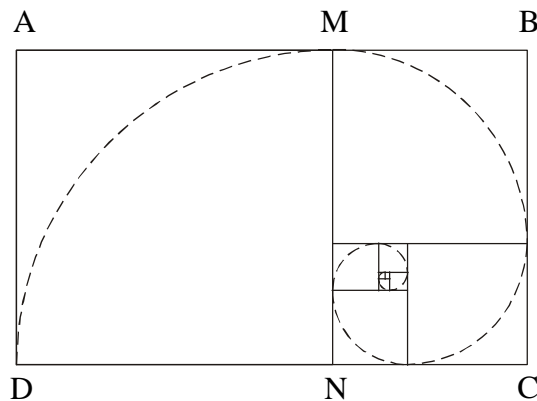
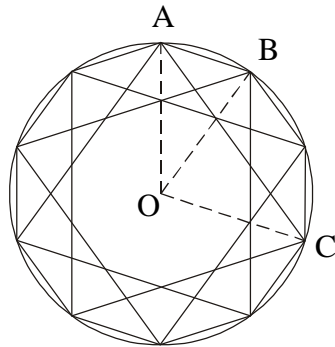


Fig. 3

#### 1.4. DECÀGONS I PENTÀGONS REGULARS

Entre una gran varietat de possibles construccions lligades al nombre d'or, ens limitarem a exposar les propietats essencials del decàgon i del pentàgon regulars, i indicar com les estructures respectives d'aquests polígons són regulades per la secció auria.

La figura 4 representa un decàgon regular convex de costat AB i un decàgon regular estrellat de costat AC, inscrits en el mateix cercle de centre O.

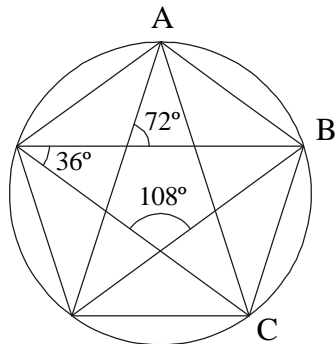


$$\frac{AC}{OA} = \frac{OA}{AB} = \Phi$$

Fig. 4

El nombre d'or és la relació del costat del decàgon estrellat amb el radi del cercle circumscrit, de la mateixa manera que la relació del radi del cercle amb el costat del decàgon convex inscrit.

Pel que fa a la figura 5, representa un pentàgon regular convex de costat AB i un pentàgon regular estrellat de costat AC inscrits en el mateix cercle. La relació del costat del pentàgon estrellat (o de la diagonal del pentàgon convex) amb el costat del pentàgon convex és igual al nombre d'or. Tot seguit veurem com s'obtenen aquests resultats.



$$\frac{AC}{AB} = \Phi$$

Fig. 5

Per començar, analitzarem una altra estructura (Fig. 6) que representa una part dels quatre polígons regulars anteriors.

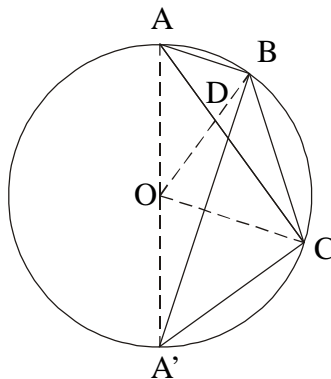


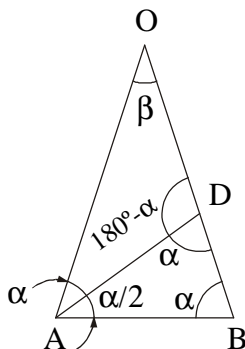
Fig. 6

AB i AC donen respectivament el costat del decàgon regular convex i el costat del decàgon regular estrellat inscrits en el cercle considerat de diàmetre AA'. Cal dir

que l'angle AOB és de  $36^\circ$ , i els angles OAB i OBA són de  $72^\circ$ . A'C (o BC) i A'B donen respectivament el costat del pentàgon regular convex i el costat del pentàgon regular estrellat.

Sense anar més lluny, ens fixarem en el triangle isòsceles AOB (Fig. 7). En el punt A tracem la bisectriu i obtenim dos nous triangles BAD i ODA. Hem de trobar quan val  $\alpha$  perquè els triangles AOB i BAD siguin semblants.

Fig. 7



Pel que fa al triangle BAD, volem que sigui semblant al triangle AOB i, per tant, haurà de ser també isòsceles. És a dir, el triangle BAD tindrà dos angles iguals que seran  $\alpha$ , els mateixos que té el triangle AOB.

Quant al triangle BAD, sabem que  $\alpha + \alpha + \alpha/2 = 180^\circ$ . A partir d'aquí podem trobar la incògnita  $\alpha$ .

$$2\hat{a} + \frac{\hat{a}}{2} = 180^\circ$$

$$\frac{4\hat{a} + \hat{a}}{2} = 180^\circ$$

$$\frac{5\hat{a}}{2} = 180^\circ$$

$$5\hat{a} = 360^\circ$$

$$\hat{a} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Ara, sabent que  $\alpha = 72^\circ$ , podem trobar  $\beta$ . Com que  $\alpha + \alpha + \beta = 180^\circ$ , substituïm i obtenim que

$$72^\circ + 72^\circ + \hat{a} = 180^\circ$$

$$144^\circ + \hat{a} = 180^\circ$$

$$\hat{a} = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$$

Els valors obtinguts coincideixen amb els angles que hem indicat en la figura 5. Cal dir que el triangle ODA és també isòsceles, amb dos angles de  $36^\circ$  i un angle de  $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ .

Per extensió, es diu que el triangle AOB i tots els seus semblants són triangles d'or (un triangle isòsceles amb dos angles de  $72^\circ$  i un angle de  $36^\circ$ ). Estem, per tant, en presència d'una construcció geomètrica anàloga a la que inspira el rectangle d'or, ja que

si tracem la bisetriu de l'angle de  $72^\circ$  obtenim un nou triangle semblant al primer. Comencem, doncs, a analitzar quina relació tenen aquests triangles amb el nombre d'or.

Hem vist i demostrat que els triangles isòsceles AOB i BAD són semblants, per tant, els seus costats són proporcionals. És a dir,  $OA/AB=AB/DB$ . Sabem que  $AB=AD=OD$ .

$$\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{DB} \quad \xrightarrow{\text{substituïm}} \quad \frac{OA}{AB} = \frac{OD}{DB}$$

Continuem substituint:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OD}{DB} \quad \xrightarrow{\text{substituïm}} \quad \frac{OB}{OD} = \frac{OD}{DB}$$

Aquesta darrera relació  $OB/OD=OD/DB$  és rigorosament idèntica a la relació que ens ha servit anteriorment per enunciar el problema de la divisió d'un segment de recta en mitjana i extrema raó.

En conseqüència,  $OB/OD=\Phi$ ; o inclús, com ja sabem,  $OA/AB=\Phi$ .

Si ens fixem en la figura 6, podem dir que la relació del radi del cercle al costat del decàgon convex inscrit és igual al nombre d'or. S'observa fàcilment que els dos triangles isòsceles ADO (vèrtex D) i AOC (vèrtex O) són semblants, d'on:

$$\frac{AC}{OA} = \frac{OA}{DA} = \Phi$$

És a dir, la relació del costat del decàgon estrellat al radi del cercle circumscrit és igual al nombre d'or.

Els triangles isòsceles BCA' (vèrtex en C) i ADO (vèrtex en D) són semblants, essent l'angle de la base, en els dos casos, igual a  $36^\circ$ .

Es dedueix que

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{OA}{OD} = \Phi$$

La relació del costat del pentàgon estrellat al costat del pentàgon convex és igual al nombre d'or.

### 1.5. LA SUCCESSIÓ DE FIBONACCI I EL NOMBRE D'OR

No hi ha dubte que la proporció auria sembla tenir algunes propietats atractives, i prosequirem amb l'estudi de les seves propietats matemàtiques.

La sèrie  $1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \Phi^5, \dots, \Phi^n$  (i tota sèrie  $a, a\Phi, a\Phi^2, \dots$ , la raó geomètrica de la qual és igual a  $\Phi$ ) participa al mateix temps de la naturalesa d'una sèrie multiplicativa (progressió geomètrica) i d'una sèrie additiva.

Immediatament podem observar aquesta propietat a partir de l'equació inicial  $\Phi^2 = \Phi + 1$ , d'on resulten també multiplicant tots els termes per  $\Phi$ :

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$$

$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2$$

$$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3$$

Si continuéssim podríem deduir que  $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$ . Observant el quadre 1, és fàcil demostrar-ho,  $\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = (3\Phi + 2) + (2\Phi + 1) = 5\Phi + 3$ . Podem declarar, doncs, que es tracta d'una progressió aritmètica, mentre que, com ja hem dit, també és una progressió geomètrica amb raó igual a  $\Phi$ . A la làmina V hem exposat aquesta propietat a través del cos humà.

Fixant-nos en l'equació  $\Phi^2 = \Phi + 1$ , podem continuar la sèrie esmentada multiplicant per  $\Phi$ ,

$$\Phi^3 = \Phi \cdot \Phi^2 = \Phi \cdot (\Phi + 1) = \Phi^2 + \Phi = (\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 1;$$

$$\Phi^4 = \Phi \cdot \Phi^3 = \Phi \cdot (2\Phi + 1) = 2\Phi^2 + \Phi = 2 \cdot (\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 2 + \Phi = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = \Phi \cdot \Phi^4 = \Phi \cdot (3\Phi + 2) = 3\Phi^2 + 2\Phi = 3 \cdot (\Phi + 1) + 2\Phi = 5\Phi + 3$$

Si observem el quadre 1 s'entendrà millor la següent explicació.

Quadre 1	$\Phi^1 = \Phi + 0$	$\Phi^6 = 8\Phi + 5$	$\Phi^{11} = 89\Phi + 55$
	$\Phi^2 = \Phi + 1$	$\Phi^7 = 13\Phi + 8$	$\Phi^{12} = 144\Phi + 89$
	$\Phi^3 = 2\Phi + 1$	$\Phi^8 = 21\Phi + 13$	$\Phi^{13} = 233\Phi + 144$
	$\Phi^4 = 3\Phi + 2$	$\Phi^9 = 34\Phi + 21$	$\Phi^{14} = 377\Phi + 233$
	$\Phi^5 = 5\Phi + 3$	$\Phi^{10} = 55\Phi + 34$	.....

Es pot veure que tant els termes independents com els coeficients de  $\Phi$  que obtenim quan expressem potències de  $\Phi$  constitueixen una sèrie de nombres enters. La successió  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$ , en què cada terme és igual a la suma dels dos termes precedents (és a dir,  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ) és la coneguda successió de Fibonacci –al·ludint al sobrenom de Leonardo de Pisa–, qui fou el primer que l'observà el 1202 en un problema de combinacions. Tractant de calcular el nombre de conills nascuts d'una parella determinada que cada mes produeix una nova parella, que al mateix temps després d'un mes ja pot reproduir-se, trobà que el nombre de parelles agregades cada mes seria  $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ . Cal dir que la relació  $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$

no fou formulada concretament per Leonardo de Pisa, sinó senyalada per Kepler quatre-cents anys més tard.

En la sèrie de Fibonacci, la raó entre un terme i el seu precedent tendeix molt ràpidament a un límit que és precisament  $\Phi=1,61803398\dots$  És fàcil comprovar-ho,

$\frac{1}{1} = 1,000000$	$\frac{8}{5} = 1,600000$	$\frac{55}{34} = 1,617647\dots$	$\frac{377}{233} = 1,618025\dots$
$\frac{2}{1} = 2,000000$	$\frac{13}{8} = 1,625000$	$\frac{89}{55} = 1,618181\dots$	$\frac{610}{377} = 1,618037\dots$
$\frac{3}{2} = 1,500000$	$\frac{21}{13} = 1,615384\dots$	$\frac{144}{89} = 1,617977\dots$	$\frac{987}{610} = 1,618032\dots$
$\frac{5}{3} = 1,666666\dots$	$\frac{34}{21} = 1,619047\dots$	$\frac{233}{144} = 1,618055\dots$	$\frac{1597}{987} = 1,6180344\dots$

Quadre 2

És a dir, límit  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \Phi$ . Això demostra que, en l'infinit, aquesta és una progressió geomètrica amb raó igual a  $\Phi$ .

Sota l'aspecte exclusivament algebraic, existeixen també dues formes de  $\Phi$  que demostren immediatament la seva notable posició en la sèrie dels nombres.

De l'equació anterior  $\Phi^2 = \Phi + 1$ , obtenim

$$\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$$

Podem continuar substituint  $\Phi$  pel seu valor,

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}$$

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}}$$

i així indefinidament. Obtenim que  $\Phi = \text{límit } \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$

També existeix una expressió de  $\Phi$  a través d'un altre límit. A partir de  $\Phi^2 = \Phi + 1$ , obtenim

$$\Phi \cdot \Phi = \Phi + 1 \quad \longrightarrow \quad \Phi = \frac{\Phi + 1}{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi} + \frac{1}{\Phi} \quad \longrightarrow \quad \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Podem continuar substituint  $\Phi$ ,

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}}$$

Això ens porta a que  $\Phi = 1 + \text{límit}$  
$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Aquesta última expressió està íntimament lligada a la successió de Fibonacci. Vegem-ho,

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1};$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3};$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

Si ens hi fixem, totes les fraccions resultants són raons dels termes de la successió de Fibonacci que, com ja hem comprovat en el quadre 2, tendeixen a un límit que és igual a  $\Phi$ . Això ens afirma un altre cop el teorema que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \Phi$ .



## 2. CÀNONS GEOMÈTRICS D'ARQUITECTURA I SISTEMES ANALÍTICS DE PROPORCIÓ

Els exemples que mostrarem a continuació són construccions geomètriques que intenten donar una idea de com aconseguir l'economia en la forma mitjançant la repetició de figures semblants. Durant la recerca, ens limitarem als problemes de dues dimensions utilitzant, com fins ara, la mateixa forma de notació. La semblança de la forma entre els rectangles diferents es pot indicar geomètricament dibuixant, per exemple, les diagonals. Un altre mètode consisteix a expressar les dimensions dels rectangles i les relacions dels seus costats en notació decimal. Això, no obstant, té l'inconvenient de no expressar amb plena claredat i precisió les relacions matemàtiques.

Nosaltres formularem les raons proporcionals que sorgeixin en els següents exemples fent ús d'arrels quadrades que s'indicaran pels símbols usuals ( $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , etc.); el nombre d'or s'indicarà amb la lletra  $\Phi$  que hem estat utilitzant.

Un rectangle de mòdul  $n$  és aquell en què la raó entre les longituds dels seus costats és igual a  $n$ . Ja que només cal el mòdul per determinar la forma del rectangle, se suposa, en general, que el costat menor és igual a la unitat; el major serà llavors numèricament igual al mòdul. D'aquesta manera, per una banda agruparem els rectangles que tenen un mòdul enter (1, 2, 3, ...) o fraccionari ( $3/2$ ,  $4/3$ , ...), i els anomenarem rectangles *estàtics*. Per altra banda, agruparem aquells en què  $n$  és un nombre incommensurable i els anomenarem rectangles *dinàmics*.

El quadrat i el doble quadrat (de mòduls 1 i  $2 = \sqrt{4}$ ) pertanyen tant a la sèrie estàtica com a la dinàmica. Les figures de la làmina I mostren dos rectangles estàtics de mòduls  $3/2$  i  $4/3$ , i cinc rectangles dinàmics de mòduls 1,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{4} = 2$  i  $\sqrt{5}$ .

Tot l'art grec dels segles VI-II a. C., com abans l'art egipci, estava fundat en l'ús de rectangles dinàmics. Entre els especialment emprats com a generadors de formes, els que es troben amb més freqüència són el rectangle de mòdul  $\Phi$  i el de mòdul  $\sqrt{5}$ .

Com hem vist més amunt, aquests dos rectangles estan íntimament relacionats per ser  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Són també els que apareixen més sovint en la natura viva, com per exemple en el cos humà i en les plantes (Làmina VI). Observant el notable predomini dels esquemes dinàmics en les estàtues, gerros i objectes grecs, és fàcil deduir que la seva presència es deu a l'ús conscient dels autors, i és natural trobar-los en l'arquitectura del període corresponent. Des d'aquest punt de vista, es fa més entenedor l'origen del mecanisme harmònic de la composició grega, i no hi ha dubte que hi havia un gran interès matemàtic i artístic en la secció auria.

Existeix una forma senzilla de descomposar harmònicament la superfície d'un rectangle dinàmic ( $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $\sqrt{\Phi}$ ,  $\Phi$ ,  $\Phi^2$ ) en rectangles i en quadrats per mitjà de diagonals i de línies perpendiculars a aquestes. Dos rectangles semblants (idèntics des del punt de vista de la forma) tenen evidentment el mateix mòdul  $m$  (en el sentit de proporció característica del rectangle).

Tot rectangle dinàmic simple de mòdul  $m = \sqrt{n}$  (sent  $n$  un nombre enter) pot descomposar-se en  $n$  rectangles semblants dividint els costats grans en  $n$  parts iguals i unint de dos en dos els punts corresponents. Per exemple (Fig. 8), hem descomposat el rectangle  $\sqrt{5}$  en 5 rectangles semblants.

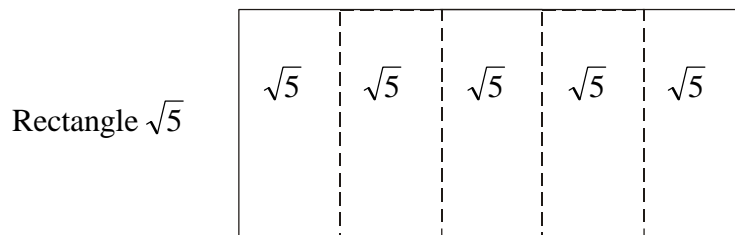


Fig. 8

Podem demostrar aquesta propietat considerant un rectangle de mòdul  $\sqrt{n}$  amb un costat petit igual a la unitat i un costat gran igual a  $\sqrt{n}$ . Dividirem el costat major en  $x$  parts iguals de manera que es mantingui la proporció  $\sqrt{n}/1 = 1/(\sqrt{n}/x)$ . Obtenim que

$$\frac{\sqrt{n}}{1} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{n}}{x}\right)} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{1} = \frac{x}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{n^2} = n = x$$

Comencem demostrant aquesta semblança de rectangles marcant la diagonal del rectangle  $\sqrt{5}$  ABCD (Fig. 9); des del vèrtex C tracem una recta perpendicular a la diagonal, que talli el costat AB en el punt E. Substituïm els angles CDB per  $\alpha$  i DCE per  $\beta$ . Per ser la diagonal una recta secant que talla els dos costats paral·lels AB i DC, se sap que l'angle DBA és igual a  $\alpha$ , i l'angle CEB és igual a  $\beta$ . Sabem que l'angle ECB és igual a  $90^\circ - \beta$ , i l'angle DBC és igual a  $90^\circ - \alpha$ . Evidentment,  $90^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ$ ;  $\alpha + \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ;  $\alpha = 90^\circ - \beta$ .

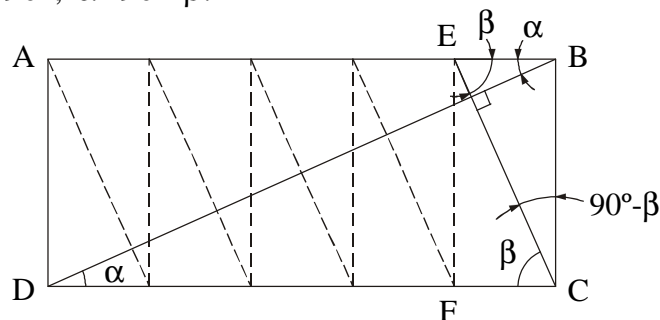


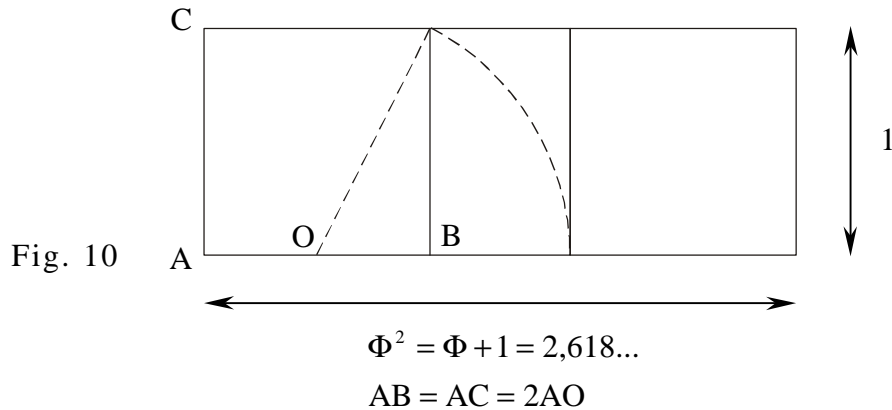
Fig. 9

Hem demostrat, doncs, que sent  $\alpha = 90^\circ - \beta$ , els triangles DBC i CEB són semblants. En conseqüència, els rectangles ABCD i EBCF són també semblants.

Les diagonals dels rectangles recíprocs (els rectangles interiors semblants al més gran i que tenen com a costat major un dels costats menors del primer) són, doncs, sempre perpendiculars a les diagonals del rectangle principal, i, a partir d'aquí, la comprovació de la semblança pot ser immediata.

Si ens fixem en els rectangles ABCD i EBCF, hi ha un altre rectangle AEFB que, segons Aristòtil, s'anomena *gnomon*, és a dir, la figura que unint-la a una superfície (en aquest cas la del rectangle recíproc) produeix una nova forma semblant a la primera (el rectangle major). Com ja sabem, el rectangle  $\Phi$  es distingeix dels altres pel fet que l'àrea restant, el gnomon, és un quadrat.

Com hem dit anteriorment, el quadrat (rectangle de mòdul 1) i el doble quadrat (rectangle  $2 = \sqrt{4}$ ) són a la vegada estàtics i dinàmics. En la seva condició dinàmica, estan fortament relacionats amb els rectangles  $\sqrt{5}$  i  $\Phi$ ; el quadrat com a gnomon de  $\Phi$ , i el doble quadrat perquè la seva diagonal és igual a  $\sqrt{5}$ . Entre els rectangles relacionats amb  $\Phi$ , hi ha, apart del  $\sqrt{5}$  que ja hem citat, el de mòdul  $\Phi^2 = \Phi + 1 = 2,618\dots$ , obtingut agregant un quadrat a l'extrem d'un rectangle  $\Phi$  (Fig. 10).



Aquesta forma s'observa freqüentment en la natura i ha estat molt usada pels arquitectes del primer Renaixement com a subdivisió vertical d'una façana quan tenien necessitat d'una forma més esvelta que el rectangle  $\Phi$ .

El rectangle de mòdul  $\sqrt{\Phi} = 1,272\dots$  proporciona, en canvi, una forma apaisada i ampla, molt útil quan es vol obtenir un ritme harmònic o una pulsació més lenta que la de la progressió  $\Phi$ . Si els seus costats tenen com a longituds 1 i  $\sqrt{\Phi}$ , la seva diagonal és igual a

$$\sqrt{\sqrt{\Phi^2 + 1^2}} = \sqrt{\Phi + 1} = \sqrt{\Phi^2} = \Phi$$

Per construir-lo (Fig. 11a), només cal dibuixar primer el rectangle  $\Phi$ , ABCD, transportar amb el compàs una longitud igual a DC que talli el costat AB en el punt E, i traçar la vertical EF.

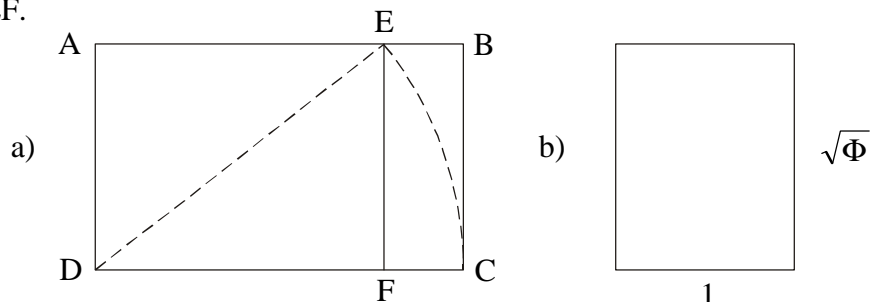


Fig. 11

Aquest rectangle  $\sqrt{\Phi}$ , AEFD, està format per dos triangles rectangles semblants als semieixos de les piràmides d'Egipte (Làmina XII), semblants alhora al triangle de Pitàgores, format per costats de longituds proporcionals a 3, 4 i 5.

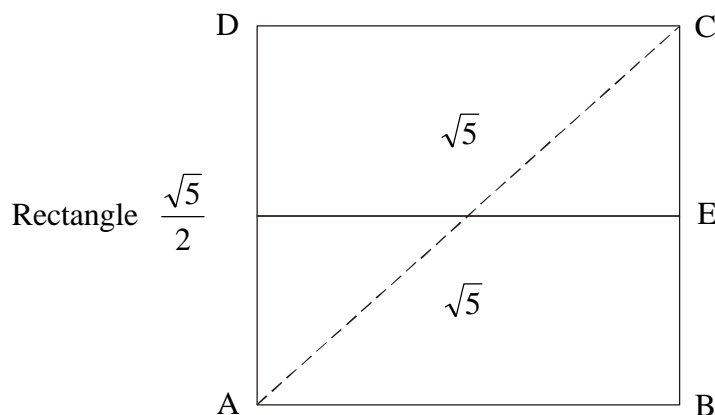
Els rectangles pròxims a  $\sqrt{\Phi}$  sovint han estat escollits pels pintors de totes les èpoques per a les proporcions dels quadres destinats a penjar-se verticalment (Fig. 11b).

El rectangle  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  ABCD (Fig. 12) es compon de dos rectangles  $\sqrt{5}$  superposats en el sentit del costat més llarg. La diagonal AC és igual al triple de BE. Sabent que BE és igual a la unitat, podem demostrar-ho a partir de Pitàgores:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$AC = \sqrt{\sqrt{5}^2 + 2^2}$$

$$AC = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$$



Hem exposat a la làmina VI un exemplar d'esquelet humà amb un quadre que representa els diferents mòduls de la estructura òssia. Per la falta de lloc, no demostrarem els resultats obtinguts, però, com es pot suposar, el nombre d'or resulta un element important, ja que regula quasi bé tots els rectangles marcats, juntament amb els rectangles dinàmics que acabem d'estudiar,  $\sqrt{5}$  i  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Cal dir que cada esquelet normal, en el sentit d'haber correspost a un individu sa, no presenta –com es podria suposar– fluctuacions i desviacions (amb lleugers errors) disposades segons un tipus ideal o mitjà, sinó més aviat en una simfonia dinàmica característica de cada persona.

A part de tot el que hem vist sobre el nombre d'or i de la fascinació constant que ens crea identificar-lo en moltes formes de la natura i de l'art antic, els descobriments més recents no fan més que confirmar la notable influència que té i que el distingeix considerablement de la resta dels nombres. Aquest caràcter exclusiu de la secció auria

ha despertat en més d'una ocasió l'interès de molts savis, erudits, matemàtics, artistes, biòlegs, etc. Fins i tot hi ha hagut un intent d'explicar la secció auria amb raons psicoanalítiques.

Però pel que fa a l'art, i a l'arquitectura en concret, s'ha discutit molt el possible valor estètic de la secció auria, o almenys el seu valor com a mitjà matemàtic per a una finalitat estètica. Entenent l'Estètica com la ciència de les relacions harmonioses, és lògic deduir-ne que totes les relacions en les formes de la natura, o creades per l'artista, que hem mencionat confirmarien la importància que té el nombre d'or en aquest sentit. De fet, no seria precipitat dir que aquestes relacions desperten ressonàncies lògiques o afectives en qui les contempla.

Paral·lelament, caldria introduir el principi de la repetició de figures semblants, que ha estat en moltes ocasions aplicable al problema de crear en les obres arquitectòniques cert orde apreciable per la vista. En contemplar les obres d'art més famoses de tots els períodes importants observem que en totes elles es repeteix una forma fonamental i que per la seva composició i disposició les seves parts formen figures semblants. L'harmonia resulta de la repetició de la forma fonamental de l'obra en les seves subdivisions. A la làmina VII hem il·lustrat aquest principi amb l'anàlisi dels alçats de diferents edificis. En ells el rectangle dominant, a vegades el de tota la façana, s'indica per una de les seves diagonals; de la mateixa manera es senyalen les parts de l'edifici que tenen forma semblant.

Entre els diversos sistemes o cànons hipotètics d'ajustament proporcional sorgits per desxifrar la complexa geometria de l'arquitectura gòtica, simplifiquem la recerca analitzant la proporció amb problemes de dues dimensions per mitjà exclusivament de rectangles. El nostre mètode, tot i ser el més simple i clar possible, demostrarà l'ús preponderant de rectangles dinàmics, i la subdivisió harmònica d'aquests rectangles en una connexió proporcional constant (rectangles recíprocs). Ens basarem en plantes de diverses esglésies gòtiques de Catalunya i especialment de Barcelona.

Donat que el treball tracta sobre el nombre d'or, observarem amb atenció les subdivisions harmòniques del rectangle  $\Phi$ . Com ja sabem, aquest té la notable propietat que la descomposició harmònica elemental determina un quadrat i un rectangle de mòdul  $\Phi$ .

### 3. L'ARQUITECTURA RELIGIOSA DEL GÒTIC CATALÀ I EL NOMBRE D'OR

La recerca tractarà sobre l'arquitectura religiosa dels segles del gòtic, és a dir, dels últims segles de l'Edat Mitjana, principalment del XIII al XV. Estudiarem els edificis dedicats al culte o, en principi, relacionats amb la dimensió social de les pràctiques religioses. Considerades la màxima expressió de l'arquitectura gòtica, les catedrals amb el seu desplegament monumental concentren una suma important de funcions simbòliques i en tots els casos dominen el nucli antic de les ciutats. De fet, és en aquesta arquitectura de primera magnitud on tenim més probabilitats de trobar el nombre d'or.

Tot i que l'anàlisi que tot seguit exposarem és molt limitat, destacarem aquells aspectes essencials per tal de demostrar l'ús notable i conscient de la secció auria en les projeccions arquitectòniques. Hem marcat les construccions geomètriques de les plantes amb rectangles de diferents colors segons el seu mòdul. Així, els rectangles d'or són de color vermell, els rectangles  $\Phi^2$  són de color blau, i els rectangles  $\sqrt{\Phi}$  són de color verd. En alguns casos hem marcat també aquells rectangles dinàmics que d'alguna manera hi tenen una presència notable; en el cas corresponent, assenyalarem els colors d'aquests rectangles.

#### 3.1. LA CATEDRAL DE BARCELONA (LÀMINA XIII)

La construcció de l'actual catedral gòtica, que substituïa la catedral romànica consagrada l'any 1058, va començar l'1 de maig del 1298. La primera pedra de la nova catedral fou col·locada pel bisbe Peregrí, començant la construcció per l'absida, que ja estava acabada el 1329, completant la nau el 1420. És, doncs, en conjunt, una obra del segle XIV. Cal dir, emperò, que la façana principal no fou realitzada fins a finals del segle passat.

No es coneix l'autor del projecte inicial, al qual succeí des del 1317 Jaume Fabre, que va completar la capçalera i va edificar la cripta de Santa Eulàlia (acabada el 1339). Apareix seguidament el mestre Bernat Roca, que realitzà el claustre, i a qui es deu l'acabament definitiu del creuer i dels campanars que es troben als seus extrems, així com el tancament de les voltes de les naus, fins a l'alçada del rerecor. El mestre Andreu Escuder acabà el claustre el 1451.

És una obra de gran unitat, de línies severes, que causa una impressió de misteri i poesia, gràcies a la seva penombra i als seus pilars airejats. En aquest context podríem afegir per primer cop, si és que cap altre autor no ho ha fet abans, que aquest aspecte en certa manera esotèric es deu als rectangles relacionats amb la secció auria que hem marcat a la làmina XIII. Les tres naus són de la mateixa altura, però la del centre és tres

vegades més ampla que les laterals, les quals es troben vorejades de capelles, emplaçades entre els contraforts. L'absida, de set trams, es troba rodejada per un deambulatori bordejat de capelles poligonals, igualment preses entre els contraforts i constituint una espècie de corona. Es tracta de la mateixa disposició que la catedral de Narbona, a França.

El claustre és considerat un dels més bonics, d'estil gòtic, que es troben a Espanya. Aquesta harmonia que més d'un autor ha observat es pot explicar, no només pels cignes que naden en un estanc o les palmeres que s'enlairen entre les galeries, sinó també pel rectangle  $\sqrt{\Phi}$  que inscriu el pati interior. El caràcter de la construcció és sever, els pilars són maciços, tot i estar rodejats per fines columnes rematades per capitells amb fullatges i figures particularment delicades. Es poden observar dos rectangles auris superposats que formen la planta de la sala capitular i del museu. La capella de Santa Llúcia, tot i que trenca amb l'ordre ortogonal que guia les línies de la catedral, està inscrita també en un rectangle d'or. Destaca també el rectangle  $\Phi$  que conté el magnífic cadoram del cor, començat el 1394 per Pere Anglada, autor també del púlpit, de l'altar major, de la cadira episcopal i del tresor, en el qual es conserva el tron del rei Martí, del segle XV, i custòdies i creus processionals dels segles XIV i XV.

### 3.2. LA CATEDRAL DE MALLORCA (LÀMINA XIV)

Poc després d'haver conquerit les Balears, Jaume I decidí construir una catedral sobre l'emplaçament de la mesquita islàmica Almudayna, que mentrestant servia al culte cristià. Tot i que la ciutat de Mallorca va ser conquerida el 1229, la construcció de la catedral es va iniciar el 1306 per la capella de la Trinitat, on el rei Jaume II de Mallorca, fill de Jaume I, va voler ser enterrat. Es va seguir per la Capella Reial, que segons sembla era ja pràcticament acabada pels volts del 1327. S'ignora el nom del primer mestre d'obres –tot i que fins fa poc s'ha considerat la participació de Ponç Descoll–, però sabem qui el van succeir: Berenguer Ostales (1345); Pere Mates (1356); Jaume Mates (1368–1390); Guillem Ses Oliveres (1390); Pere Massot (començament del segle XV); Guillem Sagrera (1420–1447); Arnau Piris (1447–1481); Joan Sagrera (1481–1504).

La concepció arquitectònica de les naus té un caràcter diferenciat. La seva construcció va ser planejada després de la reabsorció del regne de Mallorca per Pere el Cerimoniós i es caracteritza pel desig de monumentalitat i per l'ús de pilars vuitavats, com a Santa Maria del Mar. El 1327 la construcció arribava fins a les portes laterals, però només el primer tram de la nau central estava edificat. A continuació es produí un canvi de pla i un replantejament del projecte, que es va ampliar considerablement amb la renúncia al temple de nau única previst inicialment i la definició d'un ambiciós pla de tres naus. Els altres pilars foren erigits el 1406 i les bòvedes s'acabaren durant tot el segle XV. La construcció de les naus d'acord amb el nou pla correspon bàsicament a la

segona meitat del segle XIV, i els últims trams de la nau corresponen als segles XV i XVI. L'any 1587 va ser tancada l'última volta i el 1592 començava la construcció del portal major, que tanmateix va romandre incomplet fins al segle XIX. Al segle XVII es van enfondrar algunes de les voltes majors, que van haver de ser reconstruïdes.

Per dir-ho amb paraules de Georges Pillement, "...la catedral de Palma de Mallorca forma una espècie de rectangle...". Doncs bé, podem afirmar que aquest rectangle que d'alguna manera –potser subconscientment– va cridar l'atenció a l'autor és sens dubte un rectangle d'or, que es repeteix a la capella de la Trinitat, on també podem observar un rectangle  $\sqrt{\Phi}$ . Pel que fa al rectangle  $\Phi^2$ , aquí, igual que a moltes esglésies que hem estudiat i que per falta d'espai no hem pogut exposar, el seu ajustament té una coincidència totalment discutible però molt notable com a rectangle que no segueix rigorosament les línies de la catedral sinó que inscriu dins seu a més d'un rectangle, tot seguint un ordre bastant apreciable. Hem marcat també dos rectangles dinàmics que tenen una presència important, i que més o menys tenen relació amb  $\Phi$ . Aquest són 2 (verd fosc) i  $\sqrt{5}$  (rosa).

### 3.3. LA CATEDRAL DE TORTOSA (LÀMINA XV)

Tortosa va tenir una primera catedral construïda durant el tercer quart del segle XII, després de la conquesta de la ciutat. Des del començament del segle XIV trobem plantejada la idea de construir una nova catedral, seguint el model gòtic d'altres ciutats. El nomenament de Bernat d'Alguaire com a mestre d'obres l'any 1346 anunciava el començament immediat de l'obra, que es va produir l'any següent amb la col·locació de la primera pedra. L'avenç de la construcció va ser lent: cap al 1400 s'havien completat les capelles radials de la capçalera, però la volta del presbiteri no es va tancar fins al 1439 i l'altar major va ser consagrat el 1441. Seguidament es va iniciar la construcció de les naus, de cinc trams, que es van anar fent entre els segles XV i XVIII però mantenint a grans trets la unitat estilística de l'edifici gòtic. La seva planta és de tres naus amb deambulatori i capelles radials que connecten entre si mitjançant un passadís per augmentar la sensació d'amplitud.

Es pot observar la clara presència del rectangle auri que inscriu tota l'església exceptuant el semicercle de la capçalera. Hem marcat també altres rectangles  $\Phi$  que manifesten una concordança important dins el rectangle major. És possible que ens haguem precipitat senyalant un rectangle  $\Phi^2$  que abraça les tres naus i la capella major, el qual, anàlogament al cas anterior, no s'ajusta d'una manera estricta i precisa a la projecció de la planta. Tanmateix, l'hem admès, sempre dins d'una coincidència acceptable, i tenint en compte que els arquitectes que van dissenyar l'obra eren, quasi segur, conscients de les propietats de la secció auria.



### 3.4. SANTA MARIA DEL MAR (LÀMINA XVI)

Santa Maria del Mar està situada a un nivell intermedi entre la catedral i l'església parroquial, per la qual cosa se l'ha considerat una *quasicatedral*. El cert és que es tracta d'una experiència arquitectònica de fusió entre els tipus d'església d'una i tres naus, que esdevé una de les manifestacions més belles i més originals de tota l'arquitectura gòtica catalana, fins al punt que molts la consideren el seu edifici més representatiu. La construcció de l'església ha de ser posada en relació amb la puixança del seu barri i també amb el seu reconeixement com a església arxidiaconal, l'any 1324. Les obres van començar l'any 1329 sota la direcció conjunta de Berenguer de Montagut i Ramon Despuig, als quals cal atribuir l'autoria del projecte arquitectònic. El 1336 ja trobem esmentat un nou mestre d'obra, Pere Oliver o Olivera. 54 anys després de la col·locació de la primera pedra, el 1384, es tancava l'últim tram de la volta i pràcticament podia donar-se per acabada la construcció.

La planta de Santa Maria del Mar és de tres naus coronades per una capçalera amb deambulatori i tota ella encerclada per capelles laterals, situades entre els contraforts. La pretensió d'aquesta església (i de totes aquelles persones que la impulsaven) d'assolir una aparença catedralícia no ha de sorprendre si es té en compte que els anys 1317-18 el papa Joan XXII havia creat una gran quantitat de noves diòcesis a França per raons en part relacionades amb les conseqüències del combat contra l'heretgia albigesa. És bastant presumible que des de Catalunya també s'aspirés a la creació de nous bisbats, i de fet consten els intents del rei Jaume II d'aconseguir-ne per a les poblacions de Besalú i Cervera. Santa Maria del mar resulta un exemple bastant clar d'aquesta mimesi catedralícia, i els arquitectes que la dissenyaren van utilitzar una disposició totalment clàssica basant-se en les proporcions vitruvianes. Un estudi recent, que malauradament no podem exposar, ha posat de manifest la relació harmònica que existeix entre totes les parts de l'església de Santa Maria del Mar i consegüentment la regularitat de les seves proporcions. L'alçada total de l'edifici és exactament igual a l'amplada total del conjunt, de manera que les seves proporcions tendeixen a la quadratura. La justa combinació del cercle i del quadrat que resulten tan evidents en la façana d'aquest edifici gòtic es poden relacionar directament amb els sistemes de proporcionalitat clàssica. De fet, aquesta combinació del cercle i del quadrat posen de manifest que l'autor del projecte tenia profunds coneixements dels sistemes de proporcionalitat clàssics i permeten sospitar que fins i tot podia haver conegut el tractat de Vitruvi.

El nostre estudi, que s'ha centrat en la planta de l'església, ha pogut comprovar aquesta disposició clàssica de la projecció geomètrica, en aquest cas a través del rectangle  $\sqrt{5}$ . Santa Maria del Mar és un excel·lent exemple de rectangle  $\sqrt{5}$ , només cal veure a la làmina IV que aquest rectangle està format per un quadrat i dos rectangles

d'or. O, si es vol, podem dir que està format per un rectangle d'or més un altre el costat gran del qual és igual al costat petit del primer. El que hem fet ha estat partir del rectangle  $\sqrt{5}$  i fer-ne la seva descomposició harmònica, en què hi juga un paper essencial el nombre d'or. La subdivisió ha coincidit amb el traçat de les portes laterals. Cal pensar, i això ho podem dir també per a tots els altres anàlisis que hem fet, que l'ajustament dels rectangles a la planta és sempre una aproximació. Difícilment trobarem una projecció totalment ortogonal en la planta d'un edifici gòtic, encara que sigui amb lleus errors.

### 3.5. SANTS JUST I PASTOR (LÀMINA XVII)

En una gran ciutat com Barcelona, durant els segles del gòtic es comptaven set parròquies: la de Sants Just i Pastor, San Miquel, el monestir de Sant Pere de les Puelles, Santa Maria del Mar, Sant Jaume, Sant Cugat del Rec i Santa Maria del Pi. D'aquestes, Sant Miquel, Sant Jaume i Sant Cugat han desaparegut, i les que van assolir un desenvolupament arquitectònic més considerable van ser Santa Maria del Mar, Santa Maria del Pi i Sant Just.

Ens hauria agradat mostrar la parròquia del Pi com a exemple de rectangle dinàmic  $\sqrt{7}$  subdividit harmònicament en 7 rectangles recíprocs, que en un llenguatge més convencional s'anomenen trams. Tanmateix, exposarem aquells trets característics que mostren una profunda similitud amb Sant Just. Santa Maria del Pi va assumir el model conventual i va adoptar el tipus de nau única, sense transsepte, amb la capçalera poligonal i capelles baixes entre els contraforts.

L'església dels Sants Just i Pastor segueix la mateixa tipologia però amb la diferència que en comptes de tenir l'absis de set plans el té de cinc i consegüentment la nau també és de cinc trams. Aquesta parròquia barcelonina es va començar a construir l'any 1342 i l'obra va avançar a un ritme considerablement ràpid, de manera que va poder-se consagrar el 1360. Poc després ja només faltava acabar l'últim tram de la nau i la façana, que no van ser resolts fins al segle XV. A la façana, que havia de ser flanquejada per dues torretes, crida l'atenció la presència d'un finestral apuntat en comptes de la rosassa. És una solució relativament original amb la qual es va mirar de no trencar el ritme intern dels finestrals que envolten tot el perímetre superior de l'església.

Tornant al problema d'ajustament geomètric, en la parròquia dels Sants Just i Pastor hi ha una coincidència bastant important del rectangle d'or que inscriu tota la nau. També ocorre amb el rectangle  $\Phi^2$ , el qual parteix del rectangle interior de la nau i acaba just a l'eix de la corona. Realment, es tracta de coincidències que requeririen en un altre moment un estudi profund i exhaustiu. Tanmateix, es poden observar altres rectangles relacionats amb el nombre d'or que, pel que podem deduir, van ser d'una gran utilitat.

## CONCLUSIÓ

Acabant aquest treball, només ens falta resumir com es presenta des del nostre punt de vista la realitat del nombre d'or. Certs fenòmens naturals que hem intentat relacionar amb la secció auria podrien ser objecte d'una llarga discussió. Però la situació és diferent quan es tracta de l'art, on l'home ha fet un ús conscient i reflexiu de les propietats que caracteritzen el nombre  $\Phi$ . Aquesta recerca, més que una simple observació d'experiències relatives a la psicologia estètica, es pot considerar com un estudi que pretén demostrar, encara que sigui mínimament, l'ús de  $\Phi$  a l'arquitectura religiosa del gòtic català. L'estudi de les proporcions incommensurables constituïa el gran secret matemàtic reservat pels pitagòrics, que va ser transmès íntegrament a les corporacions de constructors de l'edat mitjana. Pel que fa a la seva aplicació pràctica en l'ajustament proporcional dels plans arquitectònics, especialment per als edificis religiosos, aquest secret sembla haver format part de l'ensenyament confidencial que es transmetien les famílies d'arquitectes i les corporacions d'artesans de la construcció. Sense la invenció de la impremta, l'arquitectura romandria esotèrica, ja que en absència de textos impresos accessibles a tots, l'ensenyança professional, com la religiosa i la filosòfica, hauria de ser transmesa per necessitat, si no es volien perdre tots els coneixements, tant a l'arquitecte com a l'escultor i al metge.

Ens hem estès en la psicofísica en un intent de demostrar un cop més la influència que té el nombre d'or en la nostra concepció estètica. He realitzat una petita experiència estadística demanant a diverses persones que escollissin entre diferents rectangles dinàmics (comprentent també el quadrat) aquell la forma del qual agradés més, i el rectangle  $\Phi$  ha tingut una accentuada majoria de sufragis. Certament, la utilització d'aquest rectangle deu estar molt integrada en nosaltres, ja que els formats de molts llibres, rajoles, finestres, mobles, etc., són rectangles  $\Phi$ . Per no abusar de l'espai que ens és permès en aquest treball, hem exposat en una última làmina els resultats obtinguts de l'enquesta. Aquesta experiència, tot i que no segueix pròpiament l'objectiu de la recerca, ens ha servit per donar proves fefaents del caràcter un tant exclusiu que té la secció auria pel que fa a la nostra psicologia estètica.

Amb aquesta recerca, hem obert una gran varietat de possibilitats que mereixen ser estudiades. Amb una petita mostra d'esglésies gòtiques en les quals hem trobat la secció auria podríem estendre'ns no només dins l'arquitectura gòtica, sinó també en la del Renaixement, la del Barroc, la del Neoclassicisme, fins i tot en l'arquitectura contemporània. Sigui quin sigui l'estil, la repetició de la forma fonamental serà la clau de l'harmonia arquitectònica, i, tenint en compte aquest principi, el nombre d'or hi tindrà un paper decisiu.

# BIBLIOGRAFIA

## ***Introducció matemàtica:***

CLEYET-MICHAUD, Marius: *Le nombre d'or*. 6<sup>a</sup> edició. Paris. Presses Universitaires de France, 1973. Que Sais-je?, 48.

GHYKA, Matila C.: *El número de oro, los ritos y los ritmos*. 3<sup>a</sup> edició. Barcelona. Ed. Poseidón, 1978.

GHYKA, Matila C.: *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. 3<sup>a</sup> edició. Barcelona. Ed. Poseidón, 1983.

HERZ-FISCHLER, Roger: *A Mathematical History of the Golden Number*. Mineola, New York. Dover Publications, 1998.

PEDOE, Dan: *La geometría en el arte*. 2<sup>a</sup> edició. Barcelona. Ed. Gustavo Gili, 1982.

[www.mathsoft.com/asolve/constant/gold/gold.html](http://www.mathsoft.com/asolve/constant/gold/gold.html)

[www.geocities.com/CapeCanaveral/Station/8228/](http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Station/8228/)

## ***Cànons geomètrics d'arquitectura i sistemes analítics de proporció:***

GHYKA, Matila C.: *El número de oro, los ritos y los ritmos*. 3<sup>a</sup> edició. Barcelona. Ed. Poseidón, 1978.

GHYKA, Matila C.: *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. 3<sup>a</sup> edició. Barcelona. Ed. Poseidón, 1983.

SCHOLFIELD, P.H.: *Teoría de la proporción en arquitectura*. Barcelona. Ed. Labor, 1971.

## ***L'arquitectura religiosa del gòtic català i el nombre d'or:***

BRACONS I CLAPÉS, Josep: "Els segles del gòtic" a *Arquitectura religiosa antiga i medieval*. Barcelona. Ed. L'Isard, 1999. Art de Catalunya, V.

MAILLARD, Elisa: *Églises du XIIIe au XVe siècle*. Paris. Tournon & Cie, 1962. Les Cahiers du Nombre d'Or, III.

MAILLARD, Elisa: *Églises byzantines*. Paris. Tournon & Cie, 1962. Les Cahiers du Nombre d'Or, II.

PILLEMENT, Georges: *Las catedrales de España*. Barcelona. Ed. Gustavo Gili, 1953.

VERRIÉ, F. P.: *La Iglesia de los santos Justo y Pastor*. Barcelona. Ed. Aymá, 1944.